104016 – אלגברה 1/מ

פתרונות מלאים למבחן אמצע סמסטר

אביב תשס"ד, 13.05.04

תשובות נכונות

	א'	ב'	ג'	ד'	ה'
שאלה 1	×				
שאלה 2	×				
שאלה 3		×			
שאלה 4			×		
שאלה 5				×	
שאלה 6		×			
שאלה 7					×
שאלה 8			×		
שאלה 9				×	
שאלה 10				×	

פתרון שאלה מספר 1:

נתון פולינום: $f(z)=z^5-2z^4+2z^3+z^2-2z+2$ אשר אחד משורשיו הוא: $1+i$.

נמצא את שאר השורשים של הפולינום:

מאחר והמקדמים של הפולינום הם ממשיים, הרי שגם: $\overline{1+i}=1-i$ הוא שורש של הפולינום. בנוסף, מעלת הפולינום היא אי-זוגית, לכן יש לו לפחות שורש ממשי אחד. לפי משפט, אם לפולינום יש שורש ממשי רציונלי $\frac{p}{q}$ אז $p|2\ ,\ q|1$ כלומר $\frac{p}{q}\in\{\pm1\ ,\ \pm2\}$. ע"י הצבה מוצאים כי רק $f(-1)=0$ ולכן (-1) הוא שורש של הפולינום. נחלק את הפולינום בגורמים שמצאנו כלומר נחלק אותו ב:

$$(z-(1+i))(z-(1-i))(z+1)=(z^2-2z+2)(z+1)=z^3-z^2+2$$

$$\begin{array}{l|l}
 & z^2-z+1 \\
\hline
 & z^5-2z^4+2z^3+z^2-2z+2 \quad | \quad z^3-z^2+2 \\
 & \underline{z^5-z^4+2z^2} \\
 & \quad -z^4+2z^3-z^2-2z+2 \\
 & \quad \underline{-z^4+z^3-2z} \\
 & \qquad z^3-z^2+2 \\
 & \qquad \underline{z^3-z^2+2} \\
 & \qquad = \ = \ = \ =
\end{array}$$

$$f(z)=(z^5-2z^4+2z^3+z^2-2z+2)=(z^3-z^2+2)(z^2-z+1)$$

נותר למצוא את השורשים של: z^2-z+1:

$$z^2-z+1$$

$$z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm3i}{2}$$

$$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

נעביר את כל השורשים לייצוג טריגונומטרי:

$$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=cis60^\circ \quad ; \quad z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=cis300^\circ \quad ;$$

$$z_3=1+i=\sqrt{2}cis45^\circ \quad ; \quad z_4=1-i=\sqrt{2}cis315^\circ \quad ; \quad z_5=-1=cis180^\circ$$

אפשרות אחרת: אם היינו מחלקים את הפולינום הנתון ב-

$(z-(1+i))(z-(1-i))=z^2-2z+2$ במקום לחלק ב- z^3-z^2+2 כפי שחילקנו היינו

מקבלים z^3+1 כלומר שלוש השורשים החסרים הם השורשים של (-1) מסדר 3

כלומר: $\text{cis}60^0, \text{cis}180^0, \text{cis}300^0$.

התשובה הנכונה היא: א'.

<u>פתרון שאלה מספר 2</u>:

נתונה מטריצה הפיכה A ו- $B=A^{-1}$. נחשב את ההפכית, כלומר את המטריצה B

ואז נחשב את $\frac{S}{b_{33}}$:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\qquad B=A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&4&0&1&0\\1&3&9&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&2&8&-1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&0&2&1&-2&1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&3&-1&1&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-2\frac{1}{2}&4&-1\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-3&1\\0&1&0&-2\frac{1}{2}&4&-1\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$S=3-3+1-2\tfrac{1}{2}+4-1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-1+\tfrac{1}{2}=1$$

$$b_{33}=\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{S}{b_{33}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

לכן, התשובה הנכונה היא: א'.

הערה: נבחין כי המטריצה הנתונה היא מטריצת ואן-דרמונדה, לכן חישוב ההפכית באמצעות adjA היה מקצר את התהליך.

פתרון שאלה מספר 3:

נתונה מטריצה A אנטי סימטרית מסדר 3×3, ו- B מטריצה מסדר 3×3 כלשהי.
ידוע כי לכל מטריצה ריבועית B מתקיים כי $B-B^T$ היא אנטי סימטרית. בנוסף, A אנטי סימטרית, וידוע כי סכום של מטריצות אנטי סימטריות היא מטריצה אנטי סימטרית ולכן המטריצה C היא אנטי סימטרית כסכום של אנטי סימטריות.
ידוע גם כי חזקה זוגית של מטריצה אנטי סימטרית היא מטריצה סימטרית ואילו חזקה אי זוגית של מטריצה אנטי סימטרית היא מטריצה אנטי סימטרית.
אגב, סעיף ה׳ לא נכון שכן עבור k זוגי המטריצה C^k היא סימטרית ואברי האלכסון יכולים להיות כלשהם.
לכן, התשובה הנכונה היא: ב׳.

פתרון שאלה מספר 4:

נדרג את מטריצת המקדמים המורחבת:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -b & 0 & 0 & 2b & 1+a-b \\ 0 & 0 & a & a & b+1 \\ 1 & 1 & 1 & -a & 1-b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & b & b & b & 1+a \\ 0 & 0 & a & a & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & -b \end{array}\right)$$

ننתח את כל האפשרויות:

פתרון יחיד: מספר המשוואות אחרי דרוג שווה למספר הנעלמים, לכן פתרון יחיד יהיה כאשר כל איבר מוביל שונה מ- 0, כלומר: $a \neq 0,1 \quad , \quad b \neq 0$.

נציב את הערכים הנ״ל:

$b = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & b & b & b & 1+a \\ 0 & 0 & a & a & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & -b \end{array}\right) \xrightarrow{b=0} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & a & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 0 \end{array}\right)$$

אם $a \neq -1$ אין פתרון. אם $a = -1$ אז:

$b=0\ ,\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_3=-1 \\ x_4=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\ ,\ 2-x_1\ ,\ -1\ ,\ 0)$$

קיבלנו כי עבור $(a\ ,\ b)=(-1\ ,\ 0)$ למערכת אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת.

$a=0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & b & b & b & 1+a \\ 0 & 0 & a & a & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & -b \end{array}\right) \xrightarrow{a=0} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & b & b & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b \end{array}\right)$$

אם $b\neq -1$ אין פתרון. אם $b=-1$ אז:

$a=0\ ,\ b=-1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1=4 \\ x_2+x_3=-2 \\ x_4=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4)=(4\ ,\ x_2\ ,\ -x_2-2\ ,\ 1)$$

קיבלנו כי עבור $(a\ ,\ b)=(0\ ,\ -1)$ למערכת אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת.

$a=1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & b & b & b & 1+a \\ 0 & 0 & a & a & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & -b \end{array}\right) \xrightarrow{a=1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & b & b & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b \end{array}\right)$$

אם $b \neq 0$ אין פתרון. אם $b=0$ אז:

$a=1\ ,\ b=0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

גם אז אין פתרון, כלומר אם $a=1$ אז למערכת אין פתרון לכל b.

<u>נסכם את כל המצבים שקיבלנו</u>:

פתרון יחיד: $a \neq 0,1\ ,\ b \neq 0$.

אין פתרון: $a \neq -1\ ,\ b=0$ או $a=0\ ,\ b \neq -1$ או $a=1$ וכל b.

אינסוף פתרונות:

$(a\ ,\ b)=(-1\ ,\ 0)$ דרגת חופש אחת והפתרון הכללי הוא:

$(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4)=(x_1\ ,\ 2-x_1\ ,\ -1\ ,0)$

$(a\ ,\ b)=(0\ ,\ -1)$ דרגת חופש אחת והפתרון הכללי הוא:

$(x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4)=(4\ ,\ x_2\ ,\ -x_2-2\ ,1)$

ברור מסיכום זה ומהפתרונות הנתונים כי **התשובה הנכונה היא ג'.**

<u>פתרון שאלה מספר 5:</u>

מהנתונים, A היא המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} 7-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7-2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7-3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7-4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7-5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננטה של A . נתחיל בחיסור השורה האחרונה מכל אחת מהשורות, כלומר נבצע $R_j \to R_j - R_6$ לכל j = 1, …, 5 :

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1=5!=120$$

לכן, התשובה הנכונה היא ד'.

<u>פתרון שאלה מספר 6:</u>

נתונות שתי מטריצות מרוכבות A ו- B מסדר 5×5 המקיימות : $traceAB = 3$.

נזכור כי לכל שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר מתקיים :

א. $trace(\alpha A) = \alpha \cdot trace(A)$

ב. $trace(A+B) = trace(B+A)$

ג. $trace(AB) = trace(BA)$

נחשב את הביטוי המבוקש :

$$trace(A^2B^3 - AB^3A + BA - 2I) \underset{\text{א,ב}}{=} trace(A^2B^3) - trace(AB^3A) + trace(BA) - trace(2I) =$$

$$trace(A^2B^3) - trace((AB^3)A) + trace(BA) - trace(2I) \underset{\text{ג}}{=}$$

$$trace(A^2B^3) - trace(A(AB^3)) + trace(AB) - trace(2I) \underset{\text{ג}}{=}$$

$$trace(AB) - trace(2I) \underset{\text{א}}{=} 3 - 5\cdot 2 = -7$$

לכן, התשובה הנכונה היא ב'.

פתרון שאלה מספר 7:

נחשב תחילה את הדטרמיננטה של B :

$$B=\begin{pmatrix}2+i & i & -15\\ 2 & i & -16\\ 0 & 0 & -64i\end{pmatrix} \Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}2+i & i & -15\\ 2 & i & -16\\ 0 & 0 & -64i\end{vmatrix}=-64i\begin{vmatrix}2+i & i\\ 2 & i\end{vmatrix}=(-64i)(2i-1-2i)=64i$$

$$|B|=64i$$

נעזר בחוקי דטרמיננטים ובנתון שהמטריצה A הפיכה, ונחשב דטרמיננטה של השוויון שנתון:

$$A^2B^2=-2B^3A^T$$
$$|A^2B^2|=|-2B^3A^T|$$
$$|A^2||B^2|=(-2)^3|B^3||A^T|$$
$$|A|^2|B|^2=-8|B|^3|A| \quad /:|A||B|^2$$
$$|A|=-8|B|$$
$$|A|=-8(64i)=-512i$$

לכן, התשובה הנכונה היא ה'.

פתרון שאלה מספר 8:

נתון כי $AB-A^2+I=0$. נכתוב שוויון זה קצת אחרת:

$$AB-A^2+I=0$$
$$A^2-AB=I$$
$$A(A-B)=I$$

מהשוויון הנ"ל נובע כי בהכרח המטריצה A והמטריצה $A-B$ הפיכות לכן טענות 1 ו- 3 נכונות. בנוסף נובע כי האחת היא ההפכית של השנייה כלומר:

$$A^{-1}=A-B$$
$$(A-B)^{-1}=A$$

טענה 2 לא בהכרח נכונה, כי אם נבחר $B=0$, $A=I$ אז B לא הפיכה והשוויון הנתון מתקיים.

נותר לבדוק את טענה 4, כלומר האם בהכרח $AB=BA$. נבצע מניפולציות על השוויון הנתון:

$$AB - A^2 + I = 0 \quad \Rightarrow$$
$$AB = A^2 - I = A^2 - A^{-1}A = \left(A - A^{-1}\right)A = \left(A - (A - B)\right)A = \left(A - A + B\right)A = BA \quad \Rightarrow$$
$$AB = BA$$

קיבלנו כי בהכרח גם טענה 4 נכונה.

לכן, התשובה הנכונה היא ג'.

<u>פתרון שאלה מספר 9</u>:

במרחב וקטורי מתקיים תמיד כי: $"-v" = (-1)\cdot v$. במקרה שלנו, $v = (1\ ,\ -1)$ לכן:

$$"-v" = (-1)\cdot v$$
$$"-(1\ ,\ -1)" = (-1)\circ(1\ ,\ -1) = \left((-1)\cdot 1 + (-1) - 1\ ,\ (-1)\cdot(-1) - (-1) + 1\right) = (-3\ ,\ 3)$$
$$"-(1\ ,\ -1)" = (-3\ ,\ 3)$$

לכן, התשובה הנכונה היא ד'.

<u>פתרון שאלה מספר 10</u>:

נתונים המרחבים הבאים:

V – מרחב המטריצות סימטריות הממשיות מסדר 4×4

U – מרחב המטריצות האנטי סימטריות הממשיות מסדר 4×4

D – מרחב המטריצות האלכסוניות הממשיות מסדר 4×4

ו- W המרחב הבא:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & d \\ b & c & 0 & e \\ c & d & e & 0 \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d,e \in R \right\}$$

נבדוק את כל הסעיפים:

<u>סעיף א'</u>: **לא נכון** כי בכל המטריצות במרחב $U \oplus W$ האלכסון הוא 0, והמטריצות הסימטריות האלכסון אינו בהכרח 0. בנוסף, המטריצות האנטי סימטריות U אינן תת מרחב של המטריצות הסימטריות V, לכן תשובה זו נפסלת מייד.

<u>סעיף ב'</u>: **לא נכון** כי בכל המטריצות במרחב $U \oplus D$ לכל $i \neq j$, מתקיים $a_{ij} = -a_{ji}$ ואילו במטריצות הסימטריות מתקיים $a_{ij} = a_{ji}$. גם כאן, המטריצות

האנטי סימטריות U אינן תת מרחב של המטריצות הסימטריות V, לכן תשובה זו נפסלת מייד.

<u>סעיף ג'</u>: **לא נכון** כי בכל המטריצות במרחב $W \oplus D$ מתקיים $a_{14} = a_{23} = a_{32} = a_{41}$ ואילו במטריצות הסימטריות מתקיים רק ש- $a_{14} = a_{41}$ ו- $a_{23} = a_{32}$.

<u>סעיף ד'</u>: **נכון** כי בכל המטריצות במרחב $W + D$ מתקיים $a_{14} = a_{23} = a_{32} = a_{41}$ ואילו במטריצות הסימטריות מתקיים רק ש- $a_{14} = a_{41}$ ו- $a_{23} = a_{32}$. מאחר ועבור שאר האיברים במטריצות השייכות למרחב $W + D$ מתקיים $a_{ij} = a_{ji}$, הרי ש- $W + D$ הוא תת מרחב ממש של המטריצות הסימטריות.

<u>סעיף ה'</u>: **לא נכון** כי בכל המטריצות במרחב $U + D$ לכל $i \neq j$, מתקיים $a_{ij} = -a_{ji}$ ואילו במטריצות הסימטריות מתקיים $a_{ij} = a_{ji}$ לכן יש מטריצות השייכות למרחב $U + D$ אך לא שייכות למרחב המטריצות הסימטריות. שוב גם כאן מופיע המרחב U לכן תשובה זו נפסלת מייד.

לכן, התשובה הנכונה היא ד'.